Atti Accademia Peloritana dei Pericolanti
Classe I di Scienze Fis. Mat. e Nat.
Vol. LXXIII (1995) - Adunanza del 20 ottobre 1995

AZIONI DI GRUPPI FORMALI COMMUTATIVI SU CAMPI DI CARATTERISTICA ZERO

GIUSEPPE DILETTI - GAETANA RESTUCCIA(*)

Abstract

Let F be a commutative formal group over a field K of characteristic zero. We give the explicit expressions of the endomorphisms which determinate the action of the formal group additive or moltiplicative over the K-algebra $A = K[[\mathbf{X}]]$, where $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ is a finite number of indeterminates.

Riassunto

Sia F un gruppo formale commutativo di dimensione finita su un campo K di caratteristica zero. Si forniscono le espressioni esplicite degli endomorfismi che esprimono l'azione del gruppo formale F sulla K-algebra $A = K[[\mathbf{X}]]$, essendo $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un numero finito di indeterminate.

Introduzione.

Sia K un campo e sia $\mathbf{F} = (F_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}),\ F_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \ldots, F_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$, con $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ un gruppo

(*) Lavoro eseguito con il contributo dei fondi M.U.R.S.T. del 60%.

formale n-dimensionale su K. Se A è una K-algebra commutativa allora un'azione del gruppo formale $\mathbf{F}$ su A è un morfismo di K-algebre $\mathbf{D} : A \to A[[X_1, X_2, \dots, X_n]] = A[[\mathbf{X}]]$ tale che $\mathbf{D}(a) \equiv a \mathrm{mod}(\mathbf{X})$ per ogni $a \in A$ e $\mathbf{F}_A \circ \mathbf{D} = \mathbf{D}_Y \circ \mathbf{D}$, dove i morfismi di K-algebre $\mathbf{F}_A : A[[\mathbf{X}]] \to A[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]]$ e $\mathbf{D_Y} : A[[\mathbf{X}]] \to A[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]]$ sono dati da: e $\mathbf{D_Y}\left(\sum_\alpha a_\alpha \mathbf{X}^\alpha\right) = \sum_\alpha \mathbf{D}(a_\alpha)\mathbf{Y}^\alpha$, ([6], [7]).

Sia $\mathrm{Der}_K(A)$ il modulo delle K-derivazioni di A in se stesso.

In [5] sono state studiate le derivazioni di $\mathrm{Der}_K(A)$ integrabili, ossia le derivazioni che possono essere sollevate a differenziazioni di A.

Inoltre una derivazione è detta fortemente integrabile (secondo Matsumura) quando può essere sollevata ad una differenziazione iterativa di A. Poichè una differenziazione iterativa di A altro non è che un'azione del gruppo formale additivo F_a di dimensione 1 su A, è naturale studiare in termini di differenziazioni le azioni di gruppi formali di dimensione finita n.

Poichè tali gruppi formali non sono classificati a meno di isomorfismi, come accade invece per i gruppi formali di dimensione 1 ([4]), è già interessante stabilire risultati per alcune classi di gruppi formali, almeno il gruppo formale additivo di dimensione n o per il moltiplicativo.

È noto che la nozione di derivazione $\mathbf{F}$-invariante, che gioca un ruolo cruciale nella definizione dell'azione dell'algebra di Lie $L(\mathbf{F})$ su $\mathrm{Der}_K(A)$, è definita in termini di applicazioni di $K[[\mathbf{X}]]$ in se stesso.

Nel presente lavoro si affronta il problema per i gruppi formali n-dimensionali $\mathbf{F}_a$ ed $\mathbf{F}_m$.

Precisamente dopo aver dato le definizioni fondamentali di gruppo formale e di azione di un gruppo formale n-dimensionale

$\mathbf{F}$, si definiscono gli omomorfismi $d_\alpha : K[[\mathbf{X}]] \to K[[\mathbf{X}]]$, $\alpha \in N^n$ tali che per ogni serie formale $g(\mathbf{X}) \in K[[\mathbf{X}]]$, si abbia $g(\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \sum_\alpha d_\alpha(g(\mathbf{X}))\mathbf{Y}^\alpha$. Si calcolano le loro espressioni esplicite nel caso in cui $\mathbf{F} = \mathbf{F}_a$ e $\mathbf{F} = \mathbf{F}_m$, provando che in tali casi $\mathbf{d} = \{d_\alpha\}_{\alpha\in N^n}$ è un'azione del gruppo formale $\mathbf{F}_a$ o $\mathbf{F}_m$ sulla K-algebra $A = K[[\mathbf{X}]]$.

1. Tutti gli anelli sono commutativi unitari, non necessariamente noetheriani.

Sia K un campo di caratteristica zero.

Siano $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ due n-uple di indeterminate e sia $K[[\mathbf{X}, Y]]$ l'anello delle serie formali di potenze nelle 2n indeterminate $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$. Si ha la seguente:

DEFINIZIONE 1. *Si definisce gruppo formale di dimensione n su K una n-upla*

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (F_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), F_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \dots, F_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$$

di serie formali di potenze $F_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in K[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]]$, $1 \le i \le n$, tali che

(i) $F_i(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$, $F_i(0, \mathbf{Y}) = \mathbf{Y}$

(ii) $F_i(\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathbf{Z}) = F_i(\mathbf{X}, \mathbf{F}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}))$, $\mathbf{Z}(Z_1, Z_2, \dots, \mathbf{Z}_n)$

(iii) $F_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = F_i(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$

ESEMPIO 1. $\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_a(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$, detto gruppo formale additivo;

$\mathbf{F}_m = \mathbf{F}_m(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X} + \mathbf{Y} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$, detto gruppo formale moltiplicativo.

Sia $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$. Si denoterà con $\mathbf{Y}^\alpha$ il monomio $Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2} \dots Y_n^{\alpha_n}$, essendo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in N^n$.

Poniamo

$$\mathbf{Y}^0 = 1$$

$$\mathbf{Y}^i = Y_1^0 Y_2^0 \dots Y_i^1 \dots Y_n^0 = Y_i$$

$$\mathbf{Y}^{\alpha_i} = Y_1^0 Y_2^0 \dots Y_i^{\alpha_i} \dots Y_n^0 = Y_i^{\alpha_i}.$$

Se $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, il simbolo $\binom{\gamma}{\alpha}$ indica il prodotto dei coefficienti binomiali:

$$\binom{\gamma}{\alpha} = \binom{\gamma_1}{\alpha_1} \cdot \binom{\gamma_2}{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \binom{\gamma_n}{\alpha_n}$$

e $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\dots,\alpha_n!$

Ancora poniamo

$$(1, 1, \dots, 1) = \mathbf{1}$$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{Y}^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}{\partial Y_1^{\alpha_1} \partial Y_2^{\alpha_2} \dots \partial Y_n^{\alpha_n}}$$

DEFINIZIONE 2. *Sia* $\mathbf{F}$ *un gruppo formale di dimensione n ed A una K-algebra. Si definisce azione del gruppo formale* $\mathbf{F}$ *su A un morfismo di K-algebre* $\mathbf{D} : A \to A[[\mathbf{X}]]$ *tale che* $\mathbf{D}(a) = \sum_\alpha D_\alpha(a) \cdot \mathbf{X}^\alpha$, $a \in A$, *allora* $D_0 = id_A$ *e* $\forall \alpha, \beta \in N^n$

$$(1) \qquad \sum_s D_\gamma(a) \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})^\gamma = \sum_{\alpha\beta} D_\alpha \circ D_\beta(a) \mathbf{X}^\alpha \mathbf{Y}^\beta.$$

Noi scriveremo sempre $\mathbf{D} = \{D_\alpha\}_{\alpha \in N^n}$ dove $\forall \alpha \in N^n$, $D_\alpha : A \to A$ è un endomorfismo additivo di A e per definizione $D_{(0,0,\dots,0)} = D_0 = id_A$.

DEFINIZIONE 3. *Sia A una K-algebra. Una differenziazione n-dimensionale* $\mathbf{D}$ *(o una derivazione alta infinita di dimensione n su A) è un insieme di applicazioni lineari* $\mathbf{D} = \{D_\alpha\}_{\alpha \in N^n}$ *tali* *che* $D_0 = id_A$ *e* $D_\gamma(ab) = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} D_\alpha(a)D_\beta(b)$ *per ogni* $a, b \in A$ *e* $\forall \alpha, \beta \in N^n$.

DEFINIZIONE 4. *Una differenziazione* $\mathbf{D}$ *è detta* $\mathbf{F}_a$*-iterativa se:*

$$D_\alpha \circ D_\beta = \binom{\alpha+\beta}{\alpha} D_{\alpha+\beta}, \ \forall \alpha, \beta \in N^n.$$

DEFINIZIONE 5. *Una differenziazione* $\mathbf{D}$ *è detta* $\mathbf{F}_m$*-iterativa se:*

$$D_\alpha \circ D_\beta = \sum_{\gamma=\alpha}^{\alpha+\beta} \binom{\gamma}{\alpha} \binom{\alpha}{\alpha+\beta-\gamma} D_\gamma, \ \forall \alpha, \beta \in N^n.$$

DEFINIZIONE 6. *Sia* $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *un gruppo formale di dimensione* n *su* K. *Allora per ogni* $g(\mathbf{X}) \in K[[\mathbf{X}]]$ *restano definite le applicazioni* $d_\alpha : K[[\mathbf{X}]] \to K[[\mathbf{X}]]$, $\alpha \in N^n$, *tali che:*

$$g(\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \sum_{\alpha \geq 0} d_\alpha(g(\mathbf{X}))\mathbf{Y}^\alpha = \sum_{\alpha \geq 0} h_\alpha(\mathbf{X})\mathbf{Y}^\alpha$$

Se il gruppo formale è di dimensione 1, posto $F_1(X_1, Y_1) = F(X, Y)$, $\alpha = (\alpha_1) = \alpha_1$ risulta $d_{(\alpha_i)} = d_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in N$. Essendo α_i un indice che varia in N, d'ora in avanti lo indicheremo con i e la definzione 6 diventa

DEFINIZIONE 6' *Sia* $F = F(X, Y)$ *un gruppo formale di dimensione 1 su* K *e sia* $g(X) \in K[[X]]$. *Siano* $d_i : K[[X]] \to K[[X]]$, $i \in N$, *le applicazioni date da:*

$$g(F(X, Y)) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i(g(X))Y^i = \sum_{i=0}^{\infty} h_i(X)Y^i$$

PROPOSIZIONE 1. *Sia* $\mathbf{F} = \mathbf{F}_a$ *il gruppo formale additivo di dimensione* n *su un campo* K *di caratteristica zero. Allora per ogni* $g(\mathbf{X}) \in K[[\mathbf{X}]]$ *risulta:*

$$d_\alpha(g(\mathbf{X})) = \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_a}{\partial \mathbf{Y}}\right)^\alpha_{\mathbf{Y}=0} \frac{\partial^{|\alpha|} g(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^\alpha}.$$

Dimostrazione. Sia

$$g(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X^i + a_{(2,0,\dots,0)} X_1^2 + \\ + a_{(1,1,0,\dots,0)} X_1 X_2 + \dots$$

$$g(\mathbf{F}_a) = g(\mathbf{F}_a)|_{\mathbf{Y}=0} + \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{Y}^\alpha} g(\mathbf{F}_a)|_{\mathbf{Y}=0} \mathbf{Y}^\alpha + \dots$$

Poichè $\forall i$, $\dfrac{\partial F_{i_a}}{\partial Y_i} = 1$, risulta:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{Y}^\alpha} f(\mathbf{F}_a) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial Y_1^{\alpha_1} \partial Y_2^{\alpha_2} \dots \partial Y_n^{\alpha_n}} g(\mathbf{F}_a) = \\ = \frac{\partial^{|\alpha|} g(F_{1_a}, F_{2_a}, \dots, F_{n_a})}{\partial (F_{1_a})^{\alpha_1} \partial (F_{2_a})^{\alpha_2} \dots \partial (F_{n_a})^{\alpha^n}} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_a}{\partial \mathbf{Y}}\right)^\alpha$$

Infine otteniamo

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{Y}^\alpha} g(\mathbf{F}_a)|_{\mathbf{Y}=0} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{X}^\alpha} g(\mathbf{X}) \left(\frac{\partial \mathbf{F}_a}{\partial \mathbf{Y}}\right)^\alpha$$

COROLLARIO 1. *Sia* $\mathbf{F} = \mathbf{F}_a$ *il gruppo formale additivo di dimensione* n *su un campo* K *di caratteristica zero. Allora per ogni* $g(\mathbf{X}) \in K[[\mathbf{X}]]$ *risulta:*

$$d_\alpha(g(\mathbf{X})) = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} g(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^\alpha}.$$

Dimostrazione. Ovvia, poichè $\dfrac{\partial \mathbf{F}_a}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{1}$.

PROPOSIZIONE 2. *Sia* $\mathbf{F} = \mathbf{F}_m$ *il gruppo formale moltiplicativo di dimensione* n *su un campo* K *di caratteristica zero. Allora per ogni* $g(\mathbf{X}) \in K[[\mathbf{X}]]$ *risulta:*

$$d_\alpha(g(\mathbf{X})) = \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial \mathbf{Y}}\right)^\alpha_{\mathbf{Y}=0} \frac{\partial^{|\alpha|} g(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^\alpha}.$$

Dimostrazione. Sia

$$g(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X^i + a_{(2,0,\dots,0)} X_1^2 + \\ + a_{(1,1,0,\dots,0)} X_1 X_2 + \dots$$

$$g(\mathbf{F}_m) = g(\mathbf{F}_m)|_{\mathbf{Y}=0} + \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{Y}^\alpha} g(\mathbf{F}_m)|_{\mathbf{Y}=0} \mathbf{Y}^\alpha + \dots$$

Poichè

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{Y}^\alpha} g(\mathbf{F}_m) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial Y_1^{\alpha_1} \partial Y_2^{\alpha_2} \dots \partial Y_n^{\alpha_n}} g(\mathbf{F}_m) = \\ = \frac{\partial^{|\alpha|} g(F_{1_m}, F_{2_m}, \dots, F_{n_m})}{\partial (F_{1_m})^{\alpha_1} \partial (F_{2_m})^{\alpha_2} \dots \partial (F_{n_m})^{\alpha^n}} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial \mathbf{Y}}\right)^\alpha$$

otteniamo

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{Y}^\alpha} g(\mathbf{F}_m)|_{\mathbf{Y}=0} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{X}^\alpha} g(\mathbf{X}) \left(\frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial \mathbf{Y}}\right)^\alpha$$

COROLLARIO 2. *Sia* $\mathbf{F} = \mathbf{F}_m$ *il gruppo formale additivo di dimensione* n *su un campo* K *di caratteristica zero. Allora per ogni* $g(\mathbf{X}) \in K[[\mathbf{X}]]$ *risulta:*

$$d_\alpha(g(\mathbf{X})) = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} g(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^\alpha}.$$

Dimostrazione. Ovvia poichè $\dfrac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{1} + \mathbf{X}$.

Osservazione 1. Sia nel caso in cui $F = F_a$ o $F = F_m$ dette formule si ricavano facilmente dal calcolo effettivo di $g(F(X, Y))$ [3].

TEOREMA 1. *Sia* $A = K[[\mathbf{X}]]$, $\mathbf{D} : K[[\mathbf{X}]] \to K[[\mathbf{X}]]$ *un morfismo di* K*-algebre tale che*

$$\mathbf{D}(g(\mathbf{X})) = \sum_{\alpha} D_\alpha(g(\mathbf{X}))\mathbf{Y}^\alpha, \; g(\mathbf{X}) \in K[[\mathbf{X}]].$$

Allora, per ogni $\alpha \in N^n$, si ha

1. Se $D_\alpha = d_\alpha = \dfrac{1}{\alpha!}\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{X}^\alpha}$ allora $\mathbf{D}$ è un'azione del gruppo formale additivo $\mathbf{F}_a$ sulla K-algebra $A = K[[\mathbf{X}]]$.

2. Se $D_\alpha = d_\alpha = \dfrac{1}{\alpha!}(\mathbf{1} + \mathbf{X})^\alpha \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{X}^\alpha}$ allora $\mathbf{D}$ è un'azione del gruppo formale moltiplicativo $\mathbf{F}_m$ sulla K-algebra $A = K[[\mathbf{X}]]$.

Dimostrazione. È sufficiente verificare che $\mathbf{d} = \{d_\alpha\}_{\alpha \in N^n}$ è una differenziazione $\mathbf{F}$-iterativa.

Se $\mathbf{F} = \mathbf{F}_a$, per la definizione 4 occorre verificare che $d_0 = id_A$ e che

$$d_\alpha \circ d_\beta = \binom{\alpha + \beta}{\alpha} d_{\alpha+\beta}, \; \alpha, \; \beta \in N^n \tag{1}$$

e se $\mathbf{F} = \mathbf{F}_m$, per la definizione 5 occorre verificare che $d_0 = id_A$ e che

$$d_\alpha \circ d_\beta = \sum_{\gamma=\alpha}^{\alpha+\beta} \binom{\gamma}{\alpha} \binom{\alpha}{\alpha + \beta - \gamma} d_\gamma, \alpha, \beta \in N^n. \tag{2}$$

La prova di (1) è facile. Per quanto riguarda la (2), osservando che:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{X}^{\alpha}}(1+\mathbf{X})^{\rho} = \binom{\rho}{\alpha}\alpha!(1+\mathbf{X})^{\rho-\alpha}, \quad \binom{\rho}{\alpha} = 0 \text{ se } \rho < \alpha,$$

si ha:

$$\begin{aligned} d_\alpha \circ d_\beta &= \frac{1}{\alpha!\beta!}(1+\mathbf{X})^{\alpha}\sum_{\gamma=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial \mathbf{X}^{\gamma}}(1+\mathbf{X})^{\beta}\frac{\partial^{|\alpha-\gamma|}}{\partial \mathbf{X}^{\alpha-\gamma}}\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \mathbf{X}^{\beta}} \\ &= \frac{1}{\alpha!\beta!}\sum_{\gamma=0}^{|\alpha|}\binom{\alpha}{\gamma}\binom{\beta}{\gamma}\gamma!(1+\mathbf{X})^{\alpha+\beta-\gamma}\frac{\partial^{|\alpha+\beta-\gamma|}}{\partial \mathbf{X}^{\alpha+\beta-\gamma}}. \end{aligned}$$

Posto $\alpha + \beta - \gamma = \rho$, avremo l'asserto.

Non è difficile estendere tali risultati al caso n-dimensionale.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bonanzinga V., Restuccia G., *Sistemi di derivazioni e gruppi formali,* Riv. Mat. Univ. Parma, (5) **3** (1994), 271-281.

[2] Bonanzinga V., *Systems of integrable derivations,* Le Matematiche, V. XLIX, 1994, fascicolo I.

[3] Diletti G., *Sistemi di derivazioni e gruppi formali,* Tesi di Laurea, Messina 1994.

[4] Fröhlic A., *Formal groups,* in Lectures Notes in Math., Vol. 7, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1968.

[5] Matsumura H., *Integrable derivations,* Nagoya Math. J., Vol. **87**, (1982), 227-245.

[6] Tyc A., *Invariants of linearly reductive formal group actions,* J. Algebra, Vol. **101** (1986) 166-187.

[7] Tyc A., *On F-integrable actions of the restricted Lie algebras of a formal group F in Characteristic $p > 0$,* Nagoya Math. J., Vol. **115**, (1989), 125-137

Dipartimento di Matematica
Università di Messina